מבחן באלגברה 1 מ - 104016 - סמסטר אביב תשס"א

מועד א'

שם משפחה		שם פרטי	
מס' סטודנט		פקולטה	

קרא בעיון את כל ההוראות:

- משך הבחינה **שלוש שעות**. אין להשתמש בחומר עזר.
- במבחן 5 שאלות. יש לפתור את כל 5 השאלות.
- יש לענות על השאלות בצורה מסודרת ויש לנמק כל תשובה.

יורדו נקודות על כתיבה מרושלת. **תשובה בלתי מנומקת לא תחשב** .

- יש לרשום את תוצאות החישובים במשבצות המיועדות לכך, המופיעות מיד אחרי השאלות.

תוצאה שתרשם במקום אחר לא תחשב !

- יש לבצע את כל החישובים בתוך קובץ הדפים (ולמחוק בבירור טיוטות).

ב ה צ ל ח ה !

שאלות	ציון
שאלה מס' 1	
שאלה מס' 2	
שאלה מס' 3	
שאלה מס' 4	
שאלה מס' 5	
סה"כ	

שאלה 1 (30 נקודות)

תהי T טרנספורמציה ליניארית $T: R^3 \to R^3$ הנתונה ע"י :

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \quad , \quad T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

יהי $B = (b_1, b_2, b_3)$ בסיס (סדור) של R^3 כאשר $b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

א. מצא את $[T]_B$.

ב. האם $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$?

ג. מצא בסיס ל - Ker (T)

ד. מצא בסיס ל – Im (T)

ה. חשב את dim (Im (T) ∩ Ker (T))

ו. מצא את המטריצה המייצגת $[T]_E$ של T ביחס לבסיס הסטנדרטי

$E = (e_1, e_2, e_3)$ כאשר $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

רכוז תשובות:

א. $[T]_B =$

ו. $[T]_E =$

ב. כן | לא

ה. dim (Im (T) ∩ Ker (T))

ג. בסיס ל – Ker (T)

ד. בסיס ל – Im (T)

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי A המטריצה הממשית
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשב את A^2.

ב. מצא את כל הערכים העצמיים של A, וקטורים עצמיים מתאימים, ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של כל ערך עצמי.

ג. חשב את $tr\,(A^4 - 4A^3 + 4A^2)$.

ד. ידוע כי A היא המטריצה המייצגת של טרנספורמציה ליניארית $T: V \to V$ ביחס לבסיס (סדור) B, כאשר V הוא מרחב כל המטריצות הממשיות 2×2 ו $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

ו – $b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

מצא את $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ כאשר a, b, c, d הם מספרים ממשיים.

רכוז תשובות:

א. $A^2 =$ ☐

ד. $T\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ☐

ג. $tr\left(A^4 - 4A^3 + 4A^2\right) =$ ☐

ב.

ערכים עצמיים של A	
ויקטורים עצמיים מתאימים	
ריבוי אלגברי	
ריבוי גיאומטרי	

שאלה 3 (20 נקודות)

$V = C^3$ מרחב מכפלה פנימית עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

אם $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ וקטורים ב – V אז $(v_1, v_2) = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2}$

יהי $W = span\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

א. מצא בסיס אורתונורמלי ל - W

ב. מצא בסיס אורתונורמלי ל – $W^{\perp}$ ($W^{\perp}$ - תת מרחב הניצב ל W ב - V)

ג. יהי $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ מצא את $E_W(v)$, ההטל הניצב (האורתוגונלי) של V על W.

ד. יהי v כמו בחלק ג'. מצא את $E_{W^{\perp}}(v)$, ההטל הניצב האורתוגונלי של V על $W^{\perp}$.

ה. מצא וקטור u ב – V כך ש - $E_{W^{\perp}}(u) = \frac{1}{3}u$

רכוז תשובות:

א. בסיס אורתונורמלי של W

ב. בסיס אורתונורמלי של $W^{\perp}$.

ג. $E_w(v) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

ד. $E_{W^{\perp}}(v) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

ה. $u = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

<u>שאלה 4 (15 נקודות)</u>

הפרך ע"י דוגמא, והראה שהדוגמא אכן מפריכה את הטענה, או הוכח הוכחה מלאה.

א. תהיינה S ו- T טרנספורמציות ליניאריות מ - R^2 ל - R^2 .

אם $T\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$ לכל x ב R^2 אז T = S.

ב. יהי V מרחב וקטורי ממשי ממימד סופי n ותהיינה T ו- S טרנספורמציות ליניאריות מ – V ל – V. אם Im (S) = Im (T) ו- Ker (S) = Ker (T) אז S=T .

ג המטריצות הממשיות $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ דומות זו לזו.

שאלה 5 (10 נקודות)

תהי A מטריצה ממשית $n\times n$, $n \geq 2$, המקיימת $\det(A) = -\frac{1}{4}$

א. לכל מספר ממשי t נגדיר מטריצה B_t ע"י $B_t = tA^{-1} + adj(A)$.

מצא את כל הערכים של t עבורם B_t היא מטריצה הפיכה.

ב. הוכח שאם v הוא וקטור עצמי של A המתאים לערך עצמי λ אז גם adj(A)v

הוא וקטור עצמי של A המתאים לערך עצמי λ.

רכוז תשובות:

א. t = [ ]

ב.